ALINA PARASCHIVA
SILVIU DĂNEȚ

matematică
Formule și noțiuni generale

clasele V-VIII

Ediția a II-a

CORINT

Atenție!

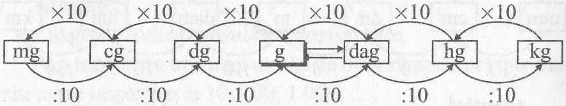
• La transformarea unei unități de măsură mai mici într-una mai mare împărțim la 10, 100, 1 000, ...

• La transformarea unei unități de măsură mai mari într-una mai mică înmulțim cu 10, 100, 1 000, ...

4. Unități de măsură pentru masă

Unitatea de măsură, internațional recunoscută, pentru masă este **gramul**, simbolizat g.

Multiplii și *submultiplii gramului* sunt:



Atenție!

• Unitățile de măsură cresc/descresc din 10 în 10.

• Sunt des folosite: quintalul (q), 1 q = 100 kg;
tona (t), 1 t = 10 q = 1 000 kg.

5. Unități de măsură pentru timp

Unitatea de măsură, internațional recunoscută, pentru timp este **secunda**, simbolizată s.

Alte unități des folosite: minutul (min), 1 min = 60 s;
ora (h), 1 h = 60 min;
ziua (d), 1 d = 24 h.

Cuprins

ALGEBRĂ

Capitolul I

Mulțimea numerelor naturale

Simbolurile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se numesc **cifre**.

Numerele scrise astfel 0, 1, 2, ..., 9, 10, 11, ... formează **șirul numerelor naturale**.

Observație. Șirul numerelor naturale este infinit.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ – mulțimea numerelor naturale.

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Numerele naturale sunt:

- **pare** – se împart exact la 2, se notează $n = 2k, k \in \mathbb{N}$;
- **impare** – nu se împart exact la 2, se notează $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$.

1. Operații cu numere naturale

1.1. Adunarea

$\boxed{\text{termen} + \text{termen} = \text{sumă}}$

Proprietățile adunării numerelor naturale:

a) Comutativitatea: $a + b = b + a, \forall\ a, b \in \mathbb{N}$.

b) Asociativitatea: $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall\ a, b, c \in \mathbb{N}$.

c) Elementul neutru: $a + 0 = 0 + a = a, \forall\ a \in \mathbb{N}$. (Numărul natural 0 este element neutru față de adunare.)

1.2. Scăderea

$\boxed{\text{descăzut} - \text{scăzător} = \text{diferență}}$

$a - b = c, \forall\ a, b \in \mathbb{N}, a \geqslant b$.

Proba scăderii: $a = b + c$.

1.3. Înmulțirea

$$\boxed{\text{deînmulțit} \cdot \text{înmulțitor} = \text{produs}}$$

Notație: În loc de semnul „ · “ care simbolizează înmulțirea se folosește și „×“.

Proprietățile înmulțirii numerelor naturale:

a) Comutativitatea: $a \cdot b = b \cdot a, \forall\, a, b \in \mathbb{N}$.

b) Asociativitatea: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$.

c) Elementul neutru: $a \cdot 1 = a, \forall\, a \in \mathbb{N}$. (Numărul natural 1 este element neutru față de înmulțire.)

d) $a \cdot 0 = 0, \forall\, a \in \mathbb{N}$.

e) Distributivitatea înmulțirii față de adunare:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}.$$

f) Distributivitatea înmulțirii față de scădere:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c, \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}, b > c.$$

1.4. Împărțirea

$$\boxed{\text{deîmpărțit} : \text{împărțitor} = \text{cât}}$$

$a : b = c, \forall\, a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0.$

Proba împărțirii: $a = b \cdot c$.

Observație: $\mathbf{0 : b = 0}, \forall\, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$.

Teorema împărțirii cu rest

Oricare ar fi numerele naturale a și b, $b \neq 0$, numite **deîmpărțit** și, respectiv, **împărțitor**, există două numere naturale q și r, numite **cât** și, respectiv, **rest**, astfel încât

$$a = b \cdot q + r, r < b.$$

Numerele q și r, determinate în aceste condiții, sunt *unice*.

2. Compararea și ordonarea numerelor naturale

Pentru orice două numere naturale a și b există una și numai una dintre următoarele relații:

$a < b$ a mai mic decât b

sau

$a = b$ a egal cu b

sau

$a > b$ a mai mare decât b

Pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$ avem următoarele relații:

- $a \leqslant b$ dacă și numai dacă $a < b$ și $a = b$;
- $a \geqslant b$ dacă și numai dacă $a > b$ și $a = b$.

Egalitatea și inegalitatea numerelor naturale au proprietatea de *tranzitivitate*:

- Dacă $a < b$ și $b < c$, atunci $a < c, \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$.
- Dacă $a \leqslant b$ și $b \leqslant c$, atunci $a \leqslant c, \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$.
- Dacă $a > b$ și $b > c$, atunci $a > c, \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$.
- Dacă $a \geqslant b$ și $b \geqslant c$, atunci $a \geqslant c, \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$.
- Dacă $a = b$ și $b = c$, atunci $a = c, \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$.

Relațiile $<, \leqslant, >, \geqslant$ sunt *relații de ordine* și *ordonează numerele naturale.*

3. Factor comun

Pentru orice numere naturale a, b și c avem:

$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$ și

$a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$, cu $b > c$.

4. Puterea unui număr natural

Definiții:

♦ Se numește **puterea a n-a a numărului natural a** numărului a^n dat prin $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ori}}$, $n \geq 2$, $a, n \in \mathbb{N}$,

unde: a – se numește **baza puterii**;

n – se numește **exponentul puterii**.

♦ Operația matematică prin care se obține puterea unui număr se numește **ridicare la putere**.

4.1. Reguli de calcul cu puteri

Pentru orice $a \in \mathbb{N}$ și orice $m, n \in \mathbb{N}$ avem:

1. $a^1 = a, \forall\, a \in \mathbb{N}^*$;

2. $a^0 = 1, \forall\, a \in \mathbb{N}^*$;

3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \forall\, a \in \mathbb{N}^*$;

4. $a^m : a^n = a^{m-n}, \forall\, a \in \mathbb{N}^*, m \geq n$;

5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \forall\, a \in \mathbb{N}^*$;

6. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \forall\, a, b \in \mathbb{N}^*$;

7. $(a : b)^n = a^n \cdot b^n, \forall\, a, b \in \mathbb{N}^*$;

8. $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}, \forall\, a \in \mathbb{N}^*$.

Observație: 0^0 nu se poate efectua.

Definiție: Puterea a doua a unui număr natural se mai numește și **pătratul** acelui număr.

4.2. Compararea puterilor

♦ Dintre două puteri care au aceeași bază, este mai mare puterea care are exponentul mai mare.

$$a^n > a^m \Leftrightarrow n > m, \forall\, a \in \mathbb{N}^*, n, m \in \mathbb{N}.$$

♦ Două puteri care au aceeași bază sunt egale dacă au exponenți egali.

$$a^n = a^m \Leftrightarrow n = m, \forall\, a \in \mathbb{N}^*, n, m \in \mathbb{N}.$$

♦ Dintre două puteri cu baze diferite, dar având același exponent (diferit de zero), este mai mare puterea care are baza mai mare.

$$a^n < b^n \Leftrightarrow a < b, \forall\, a, b \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*.$$

5. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor

Dacă într-o expresie există paranteze rotunde, drepte și acolade, începem cu efectuarea calculelor din parantezele rotunde. După efectuarea acestor calcule, parantezele drepte le transformăm în paranteze rotunde, iar acoladele în paranteze drepte și continuăm efectuarea calculelor din noile paranteze rotunde.

În funcție de ordinea în care se execută, celor cinci operații matematice cunoscute pentru numerele naturale – adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea și ridicarea la putere – li s-a alocat un **ordin**.

Operații	**Ordin**
Adunarea și scăderea	I
Înmulțirea și împărțirea	II
Ridicarea la putere	III

Dacă un exercițiu conține operații de ordine diferite, se efectuează mai întâi operațiile de ordinul III, apoi cele de ordinul II și, în final, cele de ordinul I.

6. Descompunerea numerelor naturale (în baza 10)

$\overline{ab} = a \cdot 10^1 + b \cdot 10^0$

$\overline{abc} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^0$

$\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d \cdot 10^0$

unde a, b, c, d sunt cifre, $a \neq 0$.

Observație: Orice număr natural se poate descompune după modelul de mai sus.

7. Divizibilitatea

7.1. Noțiuni generale

Definiție: Un număr natural a este **divizibil** cu b, dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$. Numărul a se numește **multiplu** de b, iar b se numește **divizor** al lui a.

Notație:	*Se citește:*
$a \,\vdots\, b$	a se divide cu b
sau	
$b \mid a$	b îl divide pe a

Proprietățile divizibilității:

1. Reflexivitatea: $a \,\vdots\, a, \forall\, a \in \mathbb{N}$.

2. Antisimetria: dacă $a \,\vdots\, b$ și $b \,\vdots\, a$, atunci $a = b, \forall\, a, b \in \mathbb{N}$.

3. Tranzitivitatea: dacă $a \,\vdots\, b$ și $b \,\vdots\, c$, atunci $a \,\vdots\, c, \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$.

4. $a \,\vdots\, 1, \forall\, a \in \mathbb{N}$.

5. $0 \,\vdots\, a, \forall\, a \in \mathbb{N}$.

6. Dacă $a \,\vdots\, b$ și $c \,\vdots\, b$, atunci $(a \pm c) \,\vdots\, b, \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$.

7. Dacă $a \,\vdots\, b$, atunci $(a \cdot c) \,\vdots\, b, \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$.

8. Dacă $a \,\vdots\, b$ și $a \,\vdots\, c$, atunci $a \,\vdots\, (b \cdot c), \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$.

7.2. Criterii de divizibilitate

✧ Un număr natural este divizibil cu 2, dacă și numai dacă ultima cifră a numărului este o cifră pară: 0, 2, 4, 6 și 8.

✧ Un număr natural este divizibil cu 5, dacă și numai dacă ultima cifră a numărului este 0 sau 5.

✧ Un număr natural este divizibil cu 10, dacă și numai dacă ultima cifră este 0.

✧ Un număr natural este divizibil cu 3 (sau 9), dacă și numai dacă suma cifrelor numărului este multiplu de 3 (sau 9).

7.3. Numere prime și numere compuse

Definiții:

♦ Spunem că un număr este **prim** dacă are ca divizori pe 1 și pe el însuși.

♦ Un număr care are mai mult de doi divizori se numește **număr compus**.

Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.)

Definiție: Spunem că d este **cel mai mare divizor comun** a două numere naturale a și b dacă:

a) $d \mid a$;

b) $d \mid b$;

c) orice alt divizor comun d' al acelor numere este divizor și pentru d.

Notație: $d = \text{c.m.m.d.c.}(a, b) \overset{\text{not}}{=} (a, b)$.

Observație: C.m.m.d.c. se află astfel:

I. Se descompun numerele a și b în produs de factori primi.

II. Se înmulțesc factorii primi comuni, scriși o singură dată, la puterile cele mai mici.

Exemplu: Calculăm (300, 225).

I. $\begin{array}{r|l} 300 & 2^2\cdot 5^2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 225 & 5^2 \\ 9 & 3^2 \\ 1 & \end{array}$

$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \qquad 225 = 3^2 \cdot 5^2$

II. $(300, 225) = 5^2 \cdot 3 = 75.$

Definiție: Două numere se numesc prime între ele dacă cel mai mare divizor comun al lor este 1.

Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.)

Definiție: Spunem că m este **cel mai mic multiplu comun** a două numere naturale a și b dacă:

a) $a \mid m$;

b) $b \mid m$;

c) orice alt multiplu comun nenul m' al acelor numere este multiplu al lui m.

Notație: $m = \text{c.m.m.m.c.}(a,b) \overset{\text{not}}{=} [a,b]$.

Observație: C.m.m.m.c se află astfel:

I. Se descompun numerele a și b în produs de factori primi.

II. Se înmulțesc factorii primi comuni și necomuni, scriși o singură dată, la puterile cele mai mari.

Exemplu: Calculăm [320, 165].

I. $\begin{array}{r|l} 320 & 2\cdot 5 \\ 32 & 2^5 \\ 1 & \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 165 & 11 \\ 15 & 3\cdot 5 \\ 1 & \end{array}$

$320 = 2^6 \cdot 5 \qquad 165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$

II. $[320, 165] = 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 10\,560.$

Capitolul II

Propoziții și mulțimi

1. Propoziții

Definiție: O **propoziție** este un enunț care este ori fals ori adevărat.

1.1. Valoarea de adevăr a unei propoziții

Dacă o propoziție este adevărată spunem că ea are valoarea de adevăr „adevărul" și o notăm cu A; dacă o propoziție este falsă spunem că are valoare de adevăr „falsul" și o notăm cu F.

1.2. Propoziții compuse

Dacă p și q sunt două propoziții, atunci putem obține următoarele propoziții compuse:

p și q, p sau q, $\rceil p$.

1. *p* și *q*

Propoziția ***p* și *q*** este adevărată când propozițiile p și q sunt adevărate.

p	***q***	***p* și *q***
A	A	A
A	F	F
F	A	F
F	F	F

2. *p* sau *q*

Propoziția ***p* sau *q*** este adevărată dacă cel puțin una dintre propozițiile p sau q este adevărată.

p	***q***	***p* sau *q***
A	A	A
A	F	A
F	A	A
F	F	F

3. $\rceil p$ (se citește non p)

Propoziția $\rceil p$ este falsă atunci când p este adevărată și adevărată atunci când p este falsă.

p	$\rceil p$
A	F
F	A